

1 Capacité thermique

Exercice 1 : Barre d'acier (Test de présélection 2025)

Afin d'amener l'eau à ébullition, en supposant que le système est étudié sous la pression atmosphérique, il faut amener l'eau à $100^\circ C$.

On considère le système constitué de l'eau, du calorimètre et de l'acier. A l'équilibre, ce système a une température T_{eq} . La condition est donc que $T_{eq} = 100^\circ C$.

Comme ce système est isolé et qu'on considère le calorimètre parfait (c'est à dire que le changement de température de ces parois ne demande qu'une énergie négligeable devant celles considérées¹), le premier principe s'écrit :

$$\Delta E = 0$$

Comme le système est macroscopiquement au repos (on ne considère pas de mouvement du calorimètre),

$$\Delta U = 0$$

Or, par extensivité des quantités considérées², on obtient :

$$\Delta U_{calorimetre} + \Delta U_{eau} + \Delta U_{acier} = 0$$

Comme le calorimètre est parfait :

$$\Delta U_{eau} + \Delta U_{acier} = 0$$

On utilise ensuite la loi de Joule appliquée à chacun des constituants :

$$c_{eau}m_{eau}(T_{eq} - \theta_{amb}) + c_{acier}m_{acier}(T_{eq} - T_{ini}) = 0 \iff T_{ini} = T_{eq} + \frac{c_{eau}m_{eau}(T_{eq} - \theta_{amb})}{c_{acier}m_{acier}} \stackrel{A.N.}{=} 694^\circ C$$

Réponse 4.

Exercice 2 : Boisson fraîche (Test de présélection 2024)

Le système considéré est le jus de fruit et les N glaçons ajoutés, où N est l'inconnue du problème.

Comme le système est isolé et macroscopiquement au repos, le premier principe s'écrit :

$$\Delta U = 0$$

Par extensivité de l'énergie interne :

$$N\Delta U_{glacon} + \Delta U_{eau} = 0$$

1. Vous avez peut-être déjà entendu la notion de masse en eau d'un calorimètre. Cela correspond à la masse d'eau à réchauffer équivalente au coût énergétique de réchauffement des parois du calorimètre. Elle est généralement de l'ordre de 20 à 30 g pour les calorimètres de travaux pratiques et peut généralement être négligée. C'est le modèle du calorimètre idéal qui est généralement utilisé dans les exercices sans précision supplémentaires.

2. Cela signifie qu'on peut sommer les contributions énergétiques de chacun des sous-systèmes.

Du fait de la fonte du glaçon, une énergie supplémentaire est absorbée par le système³

Ainsi, d'après lecture de l'énoncé, en notant $T_0 = 0^\circ C$, $T_f = 10^\circ C$:

$$\Delta U_{\text{glacon}} = c_{\text{eau}} V_{\text{glace}} \rho_{\text{glace}} (T_f - T_0) - q V_{\text{glace}} \rho_{\text{glace}}$$

Comme les glaçons absorbent de l'énergie lors de la fusion, leur énergie finale est plus élevée que l'énergie initiale, c'est ce qui explique le signe -. Soit, en notant $T_i = 30^\circ C$:

$$NV_{\text{glace}} \rho_{\text{glace}} (c_{\text{eau}}(T_f - T_0) - q) + c_{\text{eau}} m_{\text{eau}} (T_f - T_i) = 0 \iff NV_{\text{glace}} \rho_{\text{glace}} (T_f - T_0 - \frac{q}{c_{\text{eau}}}) + (T_f - T_i) m_{\text{eau}} = 0$$

Ainsi, le nombre de glaçons s'exprime comme :

$$N = \frac{m_{\text{eau}} (T_f - T_i)}{V_{\text{glace}} \rho_{\text{glace}} (-T_f + T_0 + \frac{q}{c_{\text{eau}}})} \stackrel{\text{A.N.}}{=} 24$$

Réponse 1.

Exercice 3 : A la douche

Cet exercice traite d'un système ouvert puisque l'eau arrive en continu. Des outils plus pertinents seront introduits en études supérieures. Pour l'instant, nous nous contenterons de considérer deux masses d'eau qui arrivent au niveau du mélangeur pendant une durée Δt . Ces masses sont respectivement $D_c \Delta t$ et $D_f \Delta t$ où D_c et D_f sont les débits massiques d'eau chaude et d'eau froide. Le débit d'eau tiède est égal à la somme des débits, ainsi la masse d'eau tiède est égale à $(D_c + D_f) \Delta t$.

Le premier principe appliqué à ce système isolé, en négligeant l'énergie cinétique de déplacement macroscopique du fluide :

$$\Delta U = 0 \iff D_c \Delta t (\theta_t - \theta_c) + D_f \Delta t (\theta_t - \theta_f) = 0 \iff \frac{D_c}{D_f} = \frac{\theta_f - \theta_t}{\theta_t - \theta_c}$$

On a noté $\theta_t = 35^\circ C$.

On en déduit

$$\frac{D_c}{D_f} = \frac{25}{25} = 1$$

Les deux débits sont identiques.

2 Premier principe de la thermodynamique

Exercice 4 : Chute d'Iguazu

On utilise le premier principe de la thermodynamique appliqué au système goutte que l'on suppose isolé. On néglige ainsi les transferts thermiques et les frottements.

$$\Delta E = 0$$

Il faut veiller ici à prendre en compte l'énergie macroscopique, l'énergie potentielle de pesanteur.

$$mc_{\text{eau}}(T_{\text{bas}} - T_{\text{haut}}) + mg(z_{\text{haut}} - z_{\text{bas}}) = 0 \iff T_{\text{bas}} - T_{\text{haut}} = \frac{g}{c_{\text{eau}}} (z_{\text{haut}} - z_{\text{bas}}) \stackrel{\text{A.N.}}{=} 0,190^\circ C$$

3. C'est ce qu'on appelle la chaleur latente de fusion. Tous les changements d'état libèrent ou nécessitent de l'énergie. Cette notion sera entièrement décrite dans les études supérieures.

Exercice 5 : Frottement des mains

On utilise le premier principe de la thermodynamique appliqué à l'épiderme. La variation de son énergie interne s'écrit $c\Delta TeS\rho$ tandis que le travail lié à la force de frottement est égal à $W = P\Delta t$. En l'absence de transfert thermique, on obtient :

$$\Delta U = W \iff c\Delta TeS\rho = P\Delta t \iff \Delta T = \frac{P\Delta t}{ceS\rho} \stackrel{\text{A.N.}}{=} 1,9^\circ C$$

Exercice 6 : Whisky "on the rocks"

1. La variation d'énergie interne sur une durée dt est la capacité thermique fois la variation de température sur cette durée :

$$dU = C(T(t+dt) - T(t)) = CdT$$

La capacité thermique est la masse fois la capacité thermique massique. La masse est la masse volumique fois le volume :

$$dU = \rho a^3 cdT$$

2. On applique le premier principe de la thermodynamique entre t et $t + dt$:

$$dU = \delta Q + \delta W$$

Ici $\delta W = 0$, aucune force ne travaille dans le système, et les seuls transferts thermiques ayant lieu sont d'origine conducto-convective. On utilise donc la loi de Newton pour affirmer que

$$\delta Q = hS(T_1 - T)dt = 6ha^2(T_1 - T)dt$$

Car la surface extérieure S d'un cube est 6 fois celle d'une face. Pour savoir quel signe mettre, on raisonne qualitativement : si $T_1 > T$, l'extérieur est plus chaud que la pierre, la pierre reçoit donc de l'énergie, $\delta Q < 0$. Finalement :

$$dU = 6ha^2(T_1 - T)dt$$

3. On a alors :

$$\rho a^3 cdT = 6ha^2(T_1 - T)dt$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{6h}{ca}(T_1 - T)$$

On pose donc $\tau = \frac{ca}{6h}$ et $T_\infty = T_1$ et on obtient, comme demandé :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau}$$

4. On résout d'abord l'équation homogène associée :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = 0$$

De solution $T_h(t) = \lambda e^{-t/\tau}$.

On trouve ensuite une solution particulière. Elle doit être de la forme du second membre, c'est-à-dire constante, on doit donc avoir :

$$\frac{T_p}{\tau} = \frac{T_1}{\tau}$$

$$T_p = T_1$$

Finalement, $T(t) = T_h(t) + T_p = \lambda e^{-t/\tau} + T_1$. On trouve λ en utilisant la condition initiale : $T(t=0) = T_0$, $\lambda + T_1 = T_0$. Ce qui donne :

$$T(t) = (T_0 - T_1)e^{-t/\tau} + T_1$$

Il est rassurant de voir que la température du bloc va décroître et se rapprocher indéfiniment de la température du congélateur.

Exercice 7 : L'effet de serre (adapté des IPhO 2024)

1. On considère que le Soleil émet un rayonnement isotropique, identique dans toutes les directions de l'espace. Ainsi, la puissance émise par la surface du Soleil se répartit, à une distance R du centre du Soleil sur une sphère d'aire $4\pi R^2$. Ainsi, au niveau de la surface terrestre, on considère $R = d_{TS}$.

$$S_0 = \frac{\sigma T_S^4 4\pi R_S^2}{4\pi d_{TS}^2} = \frac{\sigma T_S^4 R_S^2}{d_{TS}^2}$$

2. Par définition, S_0 correspond à la puissance surfacique reçue au niveau de la Terre, sur une surface normale. Or la surface normale pour la Terre vaut πR_T^2 alors que cette même puissance solaire se répartit sur la sphère d'aire $4\pi R_T^2$. Si on nomme S , la puissance surfacique effectivement reçue par la Terre, on obtient donc :

$$\pi R_T^2 S_0 = 4\pi R_T^2 S \iff S = \frac{S_0}{4}$$

3. On suppose $\epsilon = 1$ et $r_E = 0$. On effectue deux bilans énergétiques. Le premier est fait sur l'atmosphère, le second sur la Terre. Pour l'atmosphère :

$$\sigma T_E^4 4\pi R_E^2 = 2(4\pi R_E^2) \sigma T_A^4$$

Le facteur 2 est dû au fait que l'atmosphère émet dans les deux directions, à la fois vers le haut et vers le bas. Pour la Terre :

$$\pi R_E^2 (1 - r_A) S_0 + (4\pi R_E^2) \sigma T_A^4 = (4\pi R_E^2) \sigma T_E^4$$

$$T_A = \left(\frac{(1 - r_A) \frac{S_0}{4}}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$T_E = (2T_A^4)^{\frac{1}{4}}$$

4. Une partie $(1 - r_A)$ de la radiation solaire qui atteint la surface de la Terre traverse l'atmosphère. Une fraction r_E de cette radiation est reflétée et atteint à nouveau l'atmosphère où une fraction r_A est reflétée et retourne à la surface de la Terre. Ce processus se répète à

l'infini. La somme des puissances transmises détermine alors l'albedo. On note s_n la puissance qui retourne dans l'espace après n réflexions.

$$s_0 = r_A S_0$$

$$s_1 = (1 - r_A)^2 r_E S_0 = \frac{(1 - r_A)^2}{r_A} r_E s_0$$

Plus généralement,

$$s_n = \frac{s_{n-1}}{1 - r_A} r_A r_E (1 - r_A) = r_A r_E s_{n-1}$$

On reconnaît une suite géométrique :

$$s_n = (r_A r_E)^{n-1} s_1$$

On veut sommer tous les termes pour obtenir la puissance totale :

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} s_n = s_0 + s_1 \sum_{n=1}^{\infty} (r_A r_E)^{n-1} = r_A S_0 + (1 - r_A)^2 r_E S_0 \frac{1}{1 - r_A r_E} = S_0 (r_A + \frac{(1 - r_A)^2 r_E}{1 - r_A r_E})$$

L'albedo est alors défini comme $\alpha = \frac{s}{S_0} = r_A + \frac{(1 - r_A)^2 r_E}{1 - r_A r_E}$ **5.** A nouveau, à l'équilibre thermique, les puissances entrantes et sortantes doivent être identiques. radiation solaire absorbée :

$$\sigma T_E^4 4\pi R_E^2 \epsilon = 2(4\pi R_E^2) \sigma T_A^4 \epsilon$$

$$\pi R_E^2 (1 - r_A) S_0 + (4\pi R_E^2) \sigma T_A^4 \epsilon = (4\pi R_E^2) \sigma T_E^4$$

Nous en déduisons les nouvelles valeurs des températures :

$$T_E = (\frac{1 - \alpha}{2\sigma(2 - \epsilon)} S_0)^{\frac{1}{4}}$$

$$T_A = (\frac{T_E^4}{2})^{\frac{1}{4}}$$

6. On dérive l'expression de la température d'équilibre :

$$T_E = \left[\frac{(1 - \alpha) S_0}{2\sigma(2 - \epsilon)} \right]^{1/4}.$$

Sa dérivée par rapport à ϵ vaut :

$$\frac{dT_E}{d\epsilon} = \frac{1}{4} \left[\frac{(1 - \alpha) S_0}{2\sigma(2 - \epsilon)} \right]^{1/4} \frac{1}{(2 - \epsilon)}.$$

Ainsi, la variation est :

$$\delta T_E = \frac{dT_E}{d\epsilon} \epsilon = \left[\frac{4\sigma T_E^4}{(1 - \alpha) S_0} - 1 \right] \frac{T_E}{4} \times 0.01.$$

7. Le bilan d'énergie pour la Terre devient :

$$(\pi R_E^2)(1 - \alpha) S_0 + (4\pi R_E^2) \epsilon \sigma T_A^4 = (4\pi R_E^2) \sigma T_E^4 + (4\pi R_E^2) k(T_E - T_A),$$

et pour l'atmosphère :

$$(4\pi R_E^2) \epsilon \sigma T_E^4 + (4\pi R_E^2) k(T_E - T_A) = 2(4\pi R_E^2) \epsilon \sigma T_A^4.$$

8. On prend le logarithme des expressions de ε et k :

$$\ln \varepsilon = \ln \left[\sigma T_E^4 - \frac{(1-\alpha)S_0}{4} \right] - \ln \sigma - \ln(T_E^4 - T_A^4),$$

$$\ln k = \ln \varepsilon + \ln \sigma + \ln(2T_A^4 - T_E^4) - \ln(T_E - T_A).$$

En dérivant, on obtient le système :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} &= \frac{4\sigma T_E^3}{\sigma T_E^4 - \frac{(1-\alpha)S_0}{4}} \frac{dT_E}{d\varepsilon} - \frac{4T_E^3}{T_E^4 - T_A^4} \frac{dT_E}{d\varepsilon} - \frac{4T_A^3}{T_E^4 - T_A^4} \frac{dT_A}{d\varepsilon}, \\ 0 &= \frac{1}{\varepsilon} + \frac{8T_A^3}{2T_A^4 - T_E^4} \frac{dT_A}{d\varepsilon} - \frac{4T_E^3}{2T_A^4 - T_E^4} \frac{dT_E}{d\varepsilon} - \frac{1}{T_E - T_A} \left(\frac{dT_E}{d\varepsilon} - \frac{dT_A}{d\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

La résolution du système donne :

$$\begin{aligned} \frac{dT_E}{d\varepsilon} &= \frac{\left[\sigma(T_E^4 - T_A^4) \right] \left[1 + \frac{T_E^4 - T_A^4}{4T_A^3} \left(\frac{8T_A^3}{2T_A^4 - T_E^4} + \frac{1}{T_E - T_A} \right) \right]}{\frac{1}{T_E - T_A} + \frac{4T_E^3}{2T_A^4 - T_E^4} - \left(\frac{\sigma T_A^4 - \frac{(1-\alpha)S_0}{4}}{\sigma T_E^4 - \frac{(1-\alpha)S_0}{4}} \right) \left(\frac{T_E}{T_A} \right)^3 \left[\frac{8T_A^3}{2T_A^4 - T_E^4} + \frac{1}{T_E - T_A} \right]}. \\ \left\{ \begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{1}{T_E - T_A} + \frac{4T_E^3}{2T_A^4 - T_E^4} \right) \frac{dT_E}{d\varepsilon} &= 1 + \varepsilon \left(\frac{8T_A^3}{2T_A^4 - T_E^4} + \frac{1}{T_E - T_A} \right) \frac{dT_A}{d\varepsilon}, \\ \left[1 + \varepsilon \left(\frac{4T_E^3}{T_E^4 - T_A^4} - \frac{4\sigma T_E^3}{\sigma T_E^4 - \frac{(1-\alpha)S_0}{4}} \right) \right] \frac{dT_E}{d\varepsilon} &= \frac{4T_A^3}{T_E^4 - T_A^4} \varepsilon \frac{dT_A}{d\varepsilon}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Exercice 8 : Température du Soleil sans réaction thermonucléaire

1. On a :

$$-\frac{dV}{dr} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

On remarque que $\frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2}$. On peut donc prendre, à une constante près,

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

2. Initialement, chaque particule est infiniment éloignée des autres, donc $V_0 = 0$. Quand l'étoile est formée, le potentiel V compte toutes les interactions de particules formant ensemble une masse M_S , sur une distance typique R_S . Les masses mises en jeu dans le total de l'interaction sont de l'ordre de M_S , et elles ont lieu sur des distances typiques de l'ordre de R_S . Le potentiel total doit donc être du même ordre de grandeur que le potentiel d'interaction entre deux objets de masse M_S séparés par une distance R_S . Ainsi, $V_1 \approx -\frac{GM_S^2}{R_S}$. Finalement :

$$\Delta E_p = V_1 - V_0 \approx -G \frac{M_S^2}{R_S}$$

Si l'on faisait le calcul exact (soit en faisant un calcul d'intégrales, soit avec le théorème de Gauss), on trouverait $\Delta E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM_S}{R_S^2}$.

3. En s'agrémentant, le nuage a perdu de l'énergie potentielle. Comme pour l'énergie potentielle de pesanteur que vous connaissez dans le cas d'un champ uniforme, $E_p = mgz$, on tendance à aller vers le bas, donc à faire diminuer son énergie potentielle quand on est attiré par une force attractive. C'est exactement ce qui se passe là, les particules ont été attirées par la force attractive qu'est la gravitation, elles ont donc perdu de l'énergie potentielle.

4. La variation d'énergie interne est la capacité thermique fois la variation de température. La capacité thermique est la masse fois la capacité thermique massique. On a donc :

$$\Delta U = CM_S \Delta T$$

5. On applique le premier principe de la thermodynamique au gaz :

$$\Delta U + \Delta E_p = Q + W$$

Aucune force ne travaille (à part la gravité, mais elle est comprise dans l'énergie potentielle). Il n'y a pas de transfert thermique car, si l'on néglige le rayonnement, le système est isolé. On néglige toutes les autres interactions, donc l'énergie potentielle est uniquement celle associée à l'interaction gravitationnelle. On obtient alors :

$$CM_S(T_S - 0) - \frac{GM_S^2}{R_S} = 0$$

$$T_S = \frac{GM_S}{CR_S}$$

6. Il faut bien faire attention à mettre la masse molaire en unités SI, pour que ce soit homogène avec la masse et avec G : $M_H = 1.0\text{g/mol} = 1.0 \times 10^{-3}\text{kg/mol}$. Avec cela : $T_S \approx 2.3 \times 10^7\text{K} \approx 1.5 \times 10^7\text{K}$. Donc on retrouve une estimation correcte de la température du Soleil. L'effondrement gravitationnel de l'étoile peut donc expliquer sa température initiale. Mais si l'on ne prend en compte que l'interaction gravitationnelle, on ne peut pas expliquer que l'étoile vive aussi longtemps qu'elles le font. En effet à cette température, l'étoile rayonne une puissance $P = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$, d'après la loi de Stefan-Boltzmann. Cela veut dire qu'elle va perdre son énergie en un temps typique τ vérifiant $\frac{U_0}{\tau} \approx P$. $\tau \approx \frac{CM_S}{R_S^2 \sigma T_S^3} \approx 5 \times 10^{11}\text{s}$, ce qui est absurde. On a donc envie de conclure que la gravitation ne peut pas être la seule source d'énergie pour une étoile. Mais bien sûr, ce chiffre est grandement sous-estimé puisque se met en place au sein du Soleil un gradient de température, ce qui fait que la température en surface n'est pas du tout celle du cœur de l'étoile. Il faudrait, pour démontrer ce que l'on cherche à démontrer, faire une estimation du profil de température, pour relier la température au cœur de l'étoile à celle en surface. On pourrait alors calculer un temps typique de disparition de l'étoile dans un modèle sans réactions thermonucléaires, et on verrait bien que celui-ci serait beaucoup trop court par rapport à la durée de vie de notre Soleil.

Exercice 9 : Éruption du volcan Mérapi (adapté de l'épreuve des IPhO 2017)

1. Dans la première phase, l'équilibre thermique est atteint presque instantanément. On peut donc considérer que les transferts de chaleur n'ont pas le temps de s'effectuer $Q = 0$. De même, la transformation s'effectue à volume constant $W = 0$. Les enthalpies de vaporisation et de fusion peuvent être négligées, c'est à dire qu'on ne considère pas les contributions énergétiques liées au changement d'état⁴ Le premier principe de la thermodynamique, appliqué

4. Les enthalpies liées au changement d'état n'ont pas été abordées en cours et ne sont pas au programme du test de présélection français à destination des terminales.

au système eau + magma, macroscopiquement au repos s'écrit donc :

$$\Delta U = 0$$

Par extensivité de l'énergie interne, on peut écrire :

$$\Delta U_{eau} + \Delta U_{magma} = 0$$

On note T_e la température d'équilibre. D'après la première loi de Joule, nous pouvons écrire :

$$C_{vw}m_w(T_e - T_w) + C_{vm}m_m(T_e - T_m) = 0 \iff T_e = \frac{C_{vm}m_mT_m + C_{vw}m_wT_w}{C_{vw}m_w + C_{vm}m_m}$$

2. En considérant le mélange eau+magma comme un gaz parfait, on peut considérer l'équation d'état suivante :

$$PV = nRT$$

En introduisant le volume molaire du mélange, on obtient :

$$Pv_e = RT_e \iff P = \frac{RT_e}{v_e}$$

3. Dans cette dernière question, nous allons utiliser l'analyse dimensionnelle⁵. D'après les dépendances proposées, on cherche une expression de la forme :

$$v = kp^\alpha V^\beta m^\gamma$$

où k est une constante sans dimension et les exposants sont à déterminer.

On connaît la dimension de la vitesse : $[v] = L \cdot T^{-1}$. Pour le volume : $[V] = L^{-3}$. Pour la masse : $[m] = M$

Pour la pression, nous pouvons utiliser la définition à partir de la force pressante :

$$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{[F]}{L^2}$$

Pour exprimer la dimension de la force, on utilise la deuxième loi de Newton⁶.

$$[ma] = [F] \iff [F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

Ainsi, la pression a pour dimension :

$$[P] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \gamma & (\text{M}) \\ 1 = -\alpha + 3\beta & (\text{L}) \\ -1 = -2\alpha & (\text{T}) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \gamma = -\frac{1}{2} \\ 3\beta = 1 + \alpha = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \delta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, la vitesse du gaz s'exprime comme :

$$v = k \sqrt{\frac{pV}{m}}$$

5. Voir le cours de physique nucléaire pour une introduction à l'analyse dimensionnelle

6. Cette loi sera étudiée dans le premier cours de mécanique

3 Gaz parfait

Exercice 10 : Equilibre d'une montgolfière

Une montgolfière est immobile dans l'atmosphère si et seulement si la somme des forces qui s'exercent sur elle est vectoriellement nulle. La montgolfière est soumise à deux interactions : son poids et la poussée d'Archimède.

Le poids de la montgolfière s'écrit :

$$\vec{P} = m_{tot} \vec{g} + m_{gaz \text{ chaud}} \vec{g}$$

La poussée d'Archimède est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

$$\vec{\Pi} = -m_{gaz \text{ froid}} \vec{g}$$

Le principe d'inertie s'écrit donc :

$$m_{tot} \vec{g} + m_{gaz \text{ chaud}} \vec{g} - m_{gaz \text{ froid}} \vec{g} = \vec{0} \iff m_{tot} = V_{enveloppe}(\rho_{froid} - \rho_{chaud})$$

On utilise à présent la loi des gaz parfaits :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mn}{V} = \frac{MP}{RT}$$

Ainsi :

$$m_{tot} = V_{enveloppe}(\rho_{froid} - \rho_{chaud}) = \frac{VMP}{R} \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{T_c} \right)$$

où T_c est la température de l'air à l'intérieur de l'enveloppe.

On en déduit :

$$\frac{m_{tot}R}{VMP} = \left(\frac{1}{\theta_0} - \frac{1}{T_c} \right) \iff T_c = \frac{\theta_0 VMP}{m_{tot}R\theta_0 + VMP} \stackrel{A.N.}{=} 357K$$

Exercice 11 : Equation d'état des gaz non parfaits (adapté des IPhO 2014)

1. La modélisation d'un gaz parfait fait intervenir des molécules ponctuelles, c'est à dire sans volume propre. Or, ce fait n'est pas physique. Il faut donc introduire dans la nouvelle expression que le volume laissé libre au gaz n'est pas l'intégralité du volume, mais le volume libre des autres molécules. Ainsi, le paramètre b est environ égal au volume des molécules. Pour une mole de gaz, cela s'écrit donc :

$$b = N_A d^3$$

2. L'équation d'état du gaz de Van der Waals dans le cas où $V_G \gg b$ s'écrit :

$$(p_0 + \frac{a}{V_G^2})V_G = RT$$

Les solutions de cette équation sont :

$$V_G = \frac{RT}{2p_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2 T^2}} \right)$$

La plus petite des racines peut être oubliée, on ne conserve que la plus grande sinon le volume donné serait instable.

$$V_G = \frac{RT}{2p_0} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right) \approx \frac{RT}{p_0} \left(1 - \frac{ap_0}{R^2T^2}\right) = \frac{RT}{p_0} - \frac{a}{RT}$$

3. Pour un gaz parfait,

$$V_{G0} = \frac{RT}{p_0}$$

D'où :

$$\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right) \approx \frac{ap_0}{R^2T^2}$$

4. En utilisant l'inégalité $P \ll \frac{a}{V^2}$, l'équation de Van der Waals devient

$$\frac{a}{V_L^2}(V_L - b) = RT$$

Les solutions de cette équation deviennent :

$$V_L = \frac{a}{2RT} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4bRT}{a}}\right)$$

Pour choisir entre + et -, on utilise notre sens physique. Le volume d'une mole de liquide devrait être d'autant plus grand que b est grand, puisque les molécules occuperait alors un plus grand volume propre. On en déduit donc :

$$V_L \approx b \left(1 + \frac{bRT}{a}\right)$$

5. La masse volumique s'écrit :

$$\rho_L = \frac{\mu}{V_L} = \frac{\mu}{b \left(1 + \frac{bRT}{a}\right)} \approx \frac{\mu}{b}$$

5. Pour le coefficient α :

$$\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T} = \frac{bR}{a + bRT} \approx \frac{bR}{a}$$

Exercice 12 : Démonstration de l'équation d'état du gaz parfait

1. On utilise la relation donnée par l'énoncé

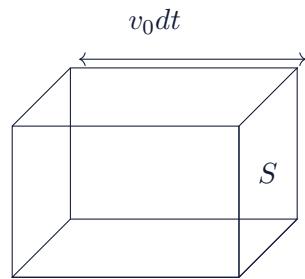
$$\frac{3}{2}k_B T = \langle E_c \rangle$$

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

2.

7. Ici on utilise un développement limité, ce qui sera découvert dans le cours des oscillateurs harmoniques. Il s'agit d'une approximation de $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ dans la limite où x est petit.



3. Ce volume vaut $dV = v_0 dt \times S$. La répartition des molécules est uniforme, dans ce volume il y a donc $dN = N \frac{dV}{V}$ molécules (proportionnel au volume considéré, et valant N si l'on considère tout le volume). Et dans ce volume, $\frac{1}{6}$ des molécules vont dans la bonne direction. Le nombre de molécules rentrant en contact avec la paroi pendant la durée dt est donc :

$$\frac{1}{6} dN = \frac{1}{6} \frac{v_0 S dt}{N}$$

4. Une molécule de ce volume a, en arrivant sur la paroi, une quantité de mouvement $p_{\text{avant}} = mv_0$, et après le choc $p_{\text{après}} = -mv_0$. La variation de quantité de mouvement d'une molécule est donc $mv_0 - (-mv_0) = 2mv_0$. La variation de quantité de mouvement de l'ensemble des molécules dans le volume considéré vaut donc :

$$dp = 2mv_0 \times \text{Nombre de particules dans le volume} = 2mv_0 \frac{1}{6} \frac{NSv_0 dt}{V}$$

$$\frac{dp}{dt} = F = 2mv_0 \frac{1}{6} \frac{NSv_0}{V}$$

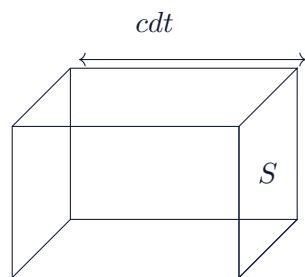
5. Donc, la pression étant la force par unité de surface :

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{3} \frac{mv_0^2 N}{V} = \frac{1}{3} \frac{3k_B T}{m} \frac{mN}{V} = \frac{Nk_B T}{V}$$

$$PV = Nk_B T = \frac{N}{N_A} N_A k_B T = nRT$$

Exercice 13 : Gaz de photons

On va suivre la même démarche que dans l'exercice précédent. On regarde ce qu'il se passe entre t et $t + dt$. On considère une fraction de la paroi, de surface S . Le volume dans lequel se trouvent les photons qui vont entrer en collision avec la paroi pendant cet intervalle de temps est :



$$dV = Scdt$$

Dans ce volume il y a $N \frac{dV}{V}$ photons, et $\frac{1}{6}$ d'entre eux vont dans la bonne direction, il y a donc

$$dN = \frac{1}{6} \frac{NdV}{V} = \frac{1}{6} \frac{NScdt}{V}$$

photons qui entreront en collision avec la paroi entre t et $t + dt$. Un photon a une quantité de mouvement avant le choc $p_{\text{avant}} = \frac{h}{\lambda}$, et après le choc $p_{\text{après}} = -\frac{h}{\lambda}$. Donc la variation de quantité de mouvement d'un photon vaut $\frac{h}{\lambda} - (-\frac{h}{\lambda}) = 2\frac{h}{\lambda}$. Donc la variation de quantité de mouvement des dN photons concernés vaut :

$$dp = 2\frac{h}{\lambda}dN$$

On a donc :

$$P = \frac{1}{S}F = \frac{1}{S} \frac{dp}{dt} = \frac{2h}{\lambda} \frac{1}{6} \frac{Nc}{V} = \frac{1}{3} \frac{1}{V} \frac{Nhc}{\lambda}$$

On reconnaît $\frac{hc}{\lambda}$, l'énergie d'un photon. Donc $\frac{Nhc}{\lambda} = U$, l'énergie totale. On obtient alors :

$$P = \frac{1}{3} \frac{U}{V}$$

Cette relation, avec un peu de thermodynamique, permet de retrouver la loi de Stefan-Boltzmann (par exemple en faisant suivre aux photons un cycle de Carnot).

4 Transferts thermiques

Exercice 14 : Chauffe-eau solaire

1. Les pertes sont d'origine conducto-convectives, entre x et $x + dx$ elles sont donc localement de la forme :

$$dP_{\text{pertes}} = \alpha dS(T(x) - T_0)$$

Avec α le coefficient de transfert conducto-convectif, et dS la surface infinitésimale considérée. Un peu de géométrie nous permet de dire que la portion de surface comprise entre x et $x + dx$ est de largeur dx et de longueur b . Ainsi :

$$dP_{\text{pertes}} = \alpha b(T(x) - T_0)dx$$

Pour ce qui est du signe, on raisonne qualitativement. Si le chauffe-eau est plus chaud que l'air environnant, il perd de l'énergie, les pertes sont donc positives.

2. On considère l'eau contenue entre les abscisses x et $x + dx$. La masse de l'eau contenue dans ce système vaut ρSdx (masse volumique ρ dans un volume Sdx , avec S la section du tuyau). La variation d'énergie interne entre t et $t + dt$ de ce système vaut

$$dU = \rho Sdx c_p(T(t + dt) - T(t)) = \rho Sdx c_p(T(t + dt) - T_0 - (T(t) - T_0)) = \rho Sdx c_p d\theta$$

L'énergie reçue par le système dûe au rayonnement solaire s'écrit :

$$\delta Q_1 = Eb dx dt$$

(une surface $b dx$ reçoit une puissance par unité de surface E , l'énergie est donc la puissance fois le temps). L'énergie reçue par le système dûe aux transferts conducto-convection s'écrit :

$$\delta Q_2 = -dP_{pertes}dt = -\alpha b(T(x) - T_0)dxdt = -\alpha b\theta(x)dxdt$$

On applique le premier principe de la thermodynamique à ce système (aucune force ne travaille) :

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q_1 + \delta Q_2 \\ \rho S dx c_p d\theta &= Eb dx dt - ab\theta(x) dx dt \\ \rho S c_p \frac{d\theta}{dt} &= Eb - ab\theta(x) \end{aligned}$$

Il faut maintenant passer d'une dérivée temporelle à une dérivée spatiale. Entre t et $t + dt$, passe une masse d'eau $dm = D_m dt$ entre x et $x + dx$. Cette quantité d'eau occupe un volume $S dx$. Donc $dm = \rho S dx = D_m dt$. On obtient donc $dt = \frac{\rho S}{D_m} dx$. On réinjecte ceci dans l'équation différentielle et on obtient :

$$c_p D_m \frac{d\theta}{dx} = Eb - ab\theta(x)$$

3. On met cette équation sous forme canonique :

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\alpha b}{c_p D_m} \theta = \frac{Eb}{c_p D_m}$$

On pose $L = \frac{c_p D_m}{\alpha b}$, et $\theta_\infty = \frac{E}{\alpha}$, et on obtient alors :

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{L} = \frac{\theta_\infty}{L}$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on résout d'abord l'équation homogène associée :

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{L} = 0$$

Cette dernière admet pour solution $\theta_h(x) = \lambda e^{-x/L}$. On trouve ensuite une solution particulière. Le second membre est constant, on cherche donc une solution constante, cela donne $\theta_p = \theta_\infty$. Finalement :

$$\theta(x) = \theta_h + \theta_p = \lambda e^{-x/L} + \theta_\infty$$

On trouve λ avec la condition initiale : $\theta(x = 0) = \lambda + \theta_\infty = T_1 - T_0$, $\lambda = T_1 - T_0 - \theta_\infty = T_1 - (\theta_\infty + T_0) = T_1 - T_\infty$. Cela donne en fin de compte :

$$\theta(x) = (T_1 - T_\infty)e^{-x/L} + \theta_\infty$$

Pour s'assurer que l'eau chauffe autant que possible, on peut choisir une longueur totale du tuyau de quelques fois L . Par exemple 4, car $e^{-4} \approx 0.02 \ll 1$.

Il est préférable de placer l'ensemble sous une vitre transparente car une vitre laisse passer la lumière, donc la source d'énergie, mais empêche le contact entre l'air à l'intérieur et l'air à l'extérieur, ce qui diminue les pertes par conducto-convection, augmentant la température finale et diminuant la longueur de tuyau nécessaire.

Exercice 15 : Équation de la chaleur

1. La présence du moins indique que si $\frac{\partial T}{\partial x} > 0$, c'est-à-dire si la température est plus importante à droite qu'à gauche, alors l'énergie va de la droite vers la gauche : l'énergie va du plus chaud au plus froid. Cela semble naturel.

2. L'énergie interne dU de la section infinitésimale varie entre t et $t + dt$, donc la variation de dU variation de dU vaut :

$$dU(x, t + dt) - dU(x, t)$$

Par ailleurs, la puissance fournie au système à gauche par les transferts thermiques vaut, par définition de j_Q :

$$P_{\text{gauche}} = S j_Q(x, t)$$

Pour ce qui est de la droite, j_Q étant orienté de la gauche vers la droite, la puissance reçue par le système à droite vaut

$$P_{\text{droite}} = -S j_Q(x + dx, t)$$

Donc, le transfert thermique étant la puissance fois le temps :

$$\delta^2 Q = (P_{\text{gauche}} + P_{\text{droite}})dt$$

On applique ensuite le premier principe de la thermodynamique au système considéré, et on obtient, sachant qu'aucune force ne travaille :

$$dU(x, t + dt) - dU(x, t) = S(j_Q(x, t) - j_Q(x + dx, t))dt$$

3. On considère un problème où la température n'est pas uniforme. C'est pour cela qu'on fait appel à des infinitésimaux ; si le système est suffisamment petit, on peut considérer la température de ce système uniforme. Cela permet d'écrire que l'énergie dU du système considéré vaut, au temps t :

$$dU(x, t) = dm \times c \times T(x, t) = \rho S c dx T(x, t)$$

La capacité thermique étant la capacité thermique massique fois la masse du système.

4. On revient donc au calcul de chacun des termes de l'écriture du premier principe. Le terme de gauche devient :

$$dU(x, t + dt) - dU(x, t) = \rho S c (T(x, t + dt) - T(x, t))dx = \rho S c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t)dxdt$$

Le terme de droite vaut, en utilisant la loi de Fourier :

$$S(j_Q(x, t) - j_Q(x + dx, t))dt = S\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right)dt = S\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)dxdt$$

On obtient finalement :

$$\rho S c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t)dxdt = S\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)dxdt$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

5. L'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Ce qui nous donne les homogénéités de $[D] = L^2 \cdot T^{-1}$. On peut donc construire une distance typique L telle que $D = \frac{L^2}{t}$.

$$L = \sqrt{Dt}$$

6. Si un état stationnaire est atteint, T ne varie plus dans le temps, donc n'est plus une fonction de t . Sa dérivée partielle par rapport à t s'annule donc, et l'équation de la chaleur devient :

$$0 = D \frac{d^2T}{dx^2}$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

On primitive :

$$\frac{dT}{dx} = A$$

Avec A une constante. On primitive à nouveau :

$$T(x) = Ax + B$$

Avec B une autre constante. Les solutions sont donc bien affines de x .

7. On sait donc qu'il existe deux constantes A et B telles que $T(x) = Ax + B$. La température est continue de l'espace. En effet, le flux d'énergie (j_Q) est continu, ce qui impose la continuité de $\frac{\partial T}{\partial x}$, donc en particulier de T par rapport à x . Cela nous donne comme conditions :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_1 \\ T(x=L) = T_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \times 0 + B = T_1 \\ A \times L + B = T_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = T_1 \\ A = \frac{T_2 - T_1}{L} \end{cases}$$

Finalement :

$$T(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1$$

Exercice 16 : Cuire un œuf dur (IPhOs 2006)

1. Tout l'œuf doit être amené à la température de coagulation. L'énergie minimum nécessaire est donc :

$$\Delta U = C_{tot} \Delta T$$

Avec $C_{tot} = mC = \mu V C = \mu \frac{4}{3} \pi R^3 C$

$$\Delta U = \frac{4}{3} \pi \mu R^3 C (T_c - T_0) \approx 1.7 \times 10^4 \text{J}$$

2. L'eau est bouillante, donc $T_1 = 100^\circ\text{C}$ On utilise la loi de Fourier pour affirmer que

$$j = \kappa \frac{T_1 - T_0}{R} \approx 2.5 \times 10^3 \text{W m}^{-2}$$

3. Par définition de j , la puissance transmise à l'œuf vaut :

$$P = jS = 4\pi R^2 J = 4\pi \kappa R (T_1 - T_0) \approx 19 \text{W}$$

4. En ordres de grandeur, l'énergie vaut la puissance fois le temps, donc le temps typique τ de cuisson vaut :

$$\tau = \frac{U}{P} = \frac{\mu C R^2}{3\kappa} \frac{T_c - T_0}{T_1 - T_0} \approx 15\text{min}$$

C'est bien l'ordre de grandeur du temps de cuisson d'un œuf dur.

5 Problème : le thermophone à tube à essai (adapté du test de présélection des IPhO 2025)

1. La relation liant la célérité, la fréquence et la longueur d'onde s'écrit :

$$c = \lambda f^8$$

Or $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Ainsi :

$$\omega = kc$$

2. Les forces de pressions s'écrivent :

- à gauche, sur la paroi en x : $p(x, t)dS\vec{u}_x$
- à droite, sur la paroi en $x + dx = -p(x + dx, t)dS\vec{u}_x$

3. On utilise ici la seconde loi de Newton qui sera (re)vue en cours de mécanique.

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

Ici, on projette cette relation sur l'axe \vec{u}_x . On obtient :

$$ma_x = (p(x, t) - p(x + dx, t))dS$$

On peut approximer la différence dans le second membre comme le numérateur d'un nombre dérivé :

$$ma_x = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdS$$

Le symbole ∂ est utilisé pour signifier qu'on prend la dérivée (usuelle) par rapport à une variable (x) spatiale d'une fonction qui dépend de plusieurs variables (espace et temps).

Pour l'accélération, le déplacement de la masse est donnée par ξ donc :

$$m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdS$$

Pour la masse, nous avons envie de l'exprimer à partir du volume $dxdS$ et de la masse volumique. Le problème est que la masse volumique varie selon x . On utilise l'approximation donnée dans le texte que la masse volumique peut, relativement aux autres variations, être considérée comme constante.

Ainsi :

$$\rho_0 dxdS \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdS$$

8. Cette relation peut être retrouvée à partir des dimensions et de la "célèbre" formule apprise au collège
 $v = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$

On simplifie ensuite l'expression pour obtenir le résultat attendu.

Ainsi :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

4. On utilise les expressions données pour la pression et le déplacement longitudinal.

$$-\rho_0 \xi_m \sin(kx) \omega^2 \cos(\omega t) = -p_m k (-\sin(kx)) \cos(\omega t) \iff \xi_m = \frac{-p_m k}{\rho_0 \omega^2} = \frac{-p_m k}{\rho_0 c^2 k^2} = \frac{-p_m}{\rho_0 c^2 k}$$

5. On suppose que la surpression acoustique est nulle en $x = L$. Ainsi, on en déduit :

$$p(L, t) = 0 \iff p_m \cos(kL) \cos(\omega t) = 0 \iff \cos(kL) = 0 \iff kL = (2n+1)\frac{\pi}{2} \iff k = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$$

6. Le spectre de fréquence comporte plusieurs pics identifiables. Le pic de plus haute intensité et de plus basse fréquence non nulle est appelé fondamental : $0,66\text{kHz}$. Ensuite, plusieurs autres pics sont visibles : $1,3\text{kHz}$, $1,95\text{kHz}$, $3,25\text{kHz}$ et $3,92\text{kHz}$.

Or, on sait que $\omega = 2\pi f = kc \iff f = \frac{kc}{2\pi} = \frac{(2n+1)\pi c}{4\pi L} = \frac{(2n+1)c}{4L}$.

7. Ainsi, la fréquence fondamentale $f_0 = \frac{c}{4L}$. On peut donc en déduire la valeur de $c = 4Lf_0$. Une autre méthode est de considérée l'espacement entre deux fréquences

$$f_{n+1} - f_n = \frac{(2(n+1)+1)c}{4L} - \frac{(2n+1)c}{4L} = \frac{2c}{4L} = \frac{c}{2L}$$

On peut donc en déduire la valeur de c de deux façons. Pour être le plus précis possible, on devrait privilégier l'espacement entre les fréquences, car on dispose d'un jeu de données important et on peut effectuer une moyenne des mesures. En revanche, on observe que l'espacement n'est pas toujours régulier et qu'il y a des artefacts dus aux mesures.

La valeur numérique est proche de celle attendue.

8.

Le déplacement acoustique au centre du stack est :

$$\xi(x_s, t) = \xi_m \sin(kx_s) \cos(\omega t), \quad kx_s = \frac{\pi}{4}.$$

Or $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, donc l'amplitude maximale vaut :

$$\xi_{\max} = \frac{\xi_m}{\sqrt{2}}.$$

Les positions extrêmes sont alors :

$$x_{23} = x_s + \frac{\xi_m}{\sqrt{2}}, \quad x_{41} = x_s - \frac{\xi_m}{\sqrt{2}}.$$

9.

Le profil de température du stack est :

$$T_s(x) = T_0 + \nabla T_s (x_s - x).$$

En évaluant en x_{41} et x_{23} :

$$T_{s,41} = T_0 + \nabla T_s \frac{\xi_m}{\sqrt{2}}, \quad T_{s,23} = T_0 - \nabla T_s \frac{\xi_m}{\sqrt{2}}.$$

10. La température acoustique locale vaut :

$$T(x_s, t) = T_0 - \tau_m \cos(kx_s) \cos(\omega t), \quad \cos(kx_s) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aux extrémités du mouvement rapide :

- Fin de la phase $1 \rightarrow 2$ ($\cos \omega t = +1$) :

$$T_2 = T_0 - \frac{\tau_m}{\sqrt{2}}.$$

- Fin de la phase $3 \rightarrow 4$ ($\cos \omega t = -1$) :

$$T_4 = T_0 + \frac{\tau_m}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{T_2 = T_0 - \frac{\tau_m}{\sqrt{2}}, \quad T_4 = T_0 + \frac{\tau_m}{\sqrt{2}}}.$$

11 Pour que le cycle fournit un travail net au fluide, il faut que la particule :

- reçoive de la chaleur au point chaud, donc $T_4 < T_{s,41}$, - cède de la chaleur au point froid, donc $T_2 > T_{s,23}$.

En utilisant les résultats des questions précédentes :

$$T_4 < T_{s,41} \implies T_0 + \frac{\tau_m}{\sqrt{2}} < T_0 + \nabla T_s \frac{\xi_m}{\sqrt{2}},$$

$$T_2 > T_{s,23} \implies T_0 - \frac{\tau_m}{\sqrt{2}} > T_0 - \nabla T_s \frac{\xi_m}{\sqrt{2}}.$$

Dans les deux cas, on obtient la même condition :

$$\boxed{\nabla T_s > \frac{\tau_m}{\xi_m}}.$$

Cette inégalité est la *condition d'amplification thermoacoustique* : le gradient thermique imposé par le stack doit dépasser un seuil critique pour permettre une conversion nette de chaleur en travail acoustique.